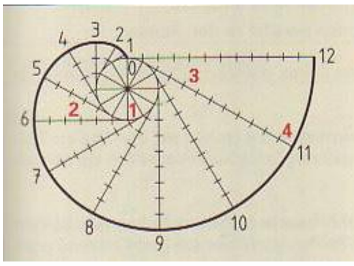
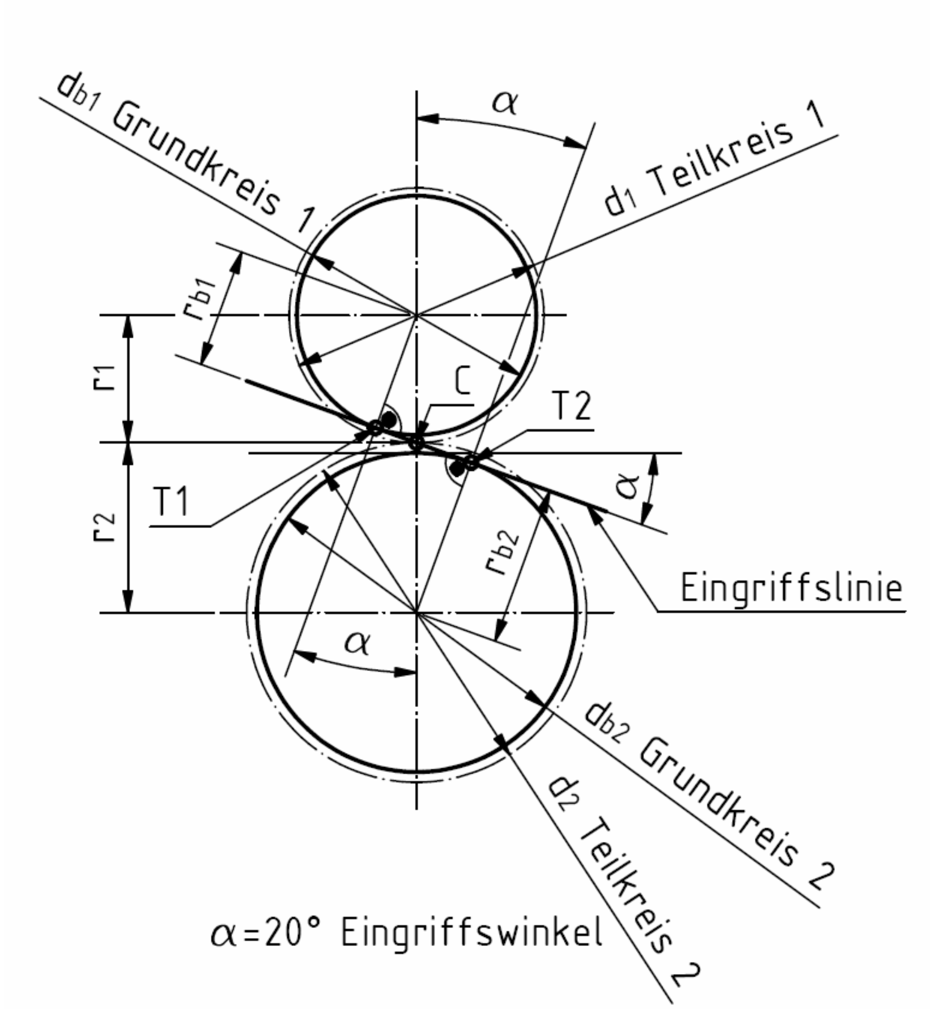
Konstruktion der Zahngeometrie (Evolvente) des Abwälzfräsers

Zahngeometrie / Grundkreis / Eingriffswinkel / Eingriffsstrecke



Im Maschinenbau ist vor allem die Evolventenverzahnung verbreitet. Eine Evolvente entsteht, wenn Sie einen Faden von einem Zylinder abwickeln und dabei den abgewickelten Faden tangential zum Zylinder halten.

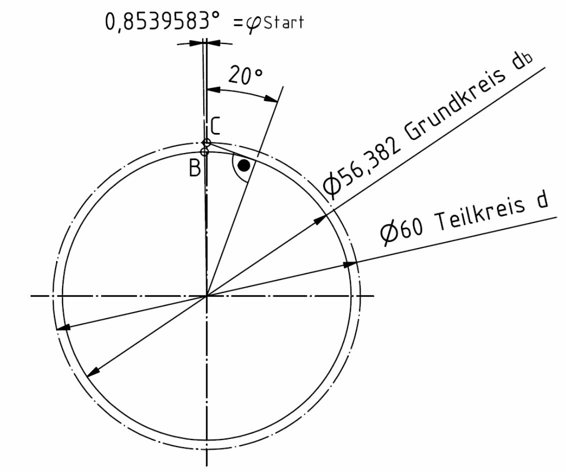


Die Zahngeometrie wird konstruiert indem die Evolvente vom Grundkreis d_b abgewickelt wird. Der Grundkreisdurchmesser berechnet sich aus dem Teilkreisdurchmesser und dem Eingriffswinkel α= 20° (Regelfall).

$$\boxed{d_b = d \bullet \cos(\alpha)}$$

Die Eingriffslinie bildet die Tangente zwischen den Grundkreisen d_{b1} und d_{b2} eines Radpaares. Die Eingriffslinie ist um den Eingriffswinkel α geneigt (Regelfall α=20°). Auf der Eingriffslinie liegen die Punkte T1, T2 und C (Berührungspunkt der Teilkreise).

Berechnung des Startwinkels φ_{Start} für die Evolventenberechnung



Der Punkt C, der Evolvente, ist durch die konstruktiven Gegebenheiten definiert. Es stellt sich die Frage, wo auf dem Grundkreisdurchmesser d_b die Evolvente beginnt. Dazu wird der Stratwinkel φ_{Start} berechnet, damit erhält man den Startpunkt B für die Evolvente. Der Winkel φ_{Start} ist für alle Stirnräder mit α= 20° Eingriffswinkel und Profilverschiebungsfaktor x= 0 mm gleich. Dies wird durch die Formel

$$\boxed{\varphi_{Start} = \frac{180° \bullet \mathrm{inv}(\alpha)}{\pi}}$$ ausgedrückt.

Bei Verzahnungsberechnungen wird oft mit der Evolventenfunktion inv(α) (sprich Involut α) gerechnet. Für α= 20° ergibt sich inv(α) wie folgt:

$$inv(\alpha) = \tan(\alpha) - \frac{\pi}{180°} \bullet \alpha \quad \rightarrow$$

$$\underline{\underline{inv(20°)}} = \tan(20°) - \frac{\pi}{180°} \bullet 20° = \underline{\underline{0{,}014904383867}}$$

(Rechnereinstellung deg.)

Wenn Sie in der Literatur inv(α) lesen, können Sie bei α= 20° für inv(α) den Zahlenwert 0,014904383867 einsetzen.

Der Winkel φ_{Start} kann wie folgt berechnet werden:

$$\varphi_{Start} = \frac{180° \bullet \mathrm{inv}(\alpha)}{\pi} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\varphi_{Start}}} = \frac{180° \bullet 0{,}014904383867}{\pi} = \underline{\underline{0{,}853958291841°}}$$

Dieser Winkel ist immer gleich gross, sofern der Eingriffswinkel α= 20° beträgt und der Profilverschiebungsfaktor x= 0 mm ist.

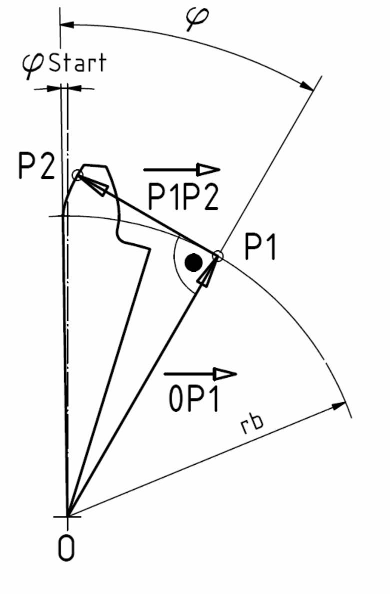
Mathematische Beschreibung der Zahngeometrie

Die Evolventengeometrie einer Zahnflanke lässt sich mit zwei Vektoren beschreiben. Folgende Grössen müssen dazu bekannt sein:

Grundkreisradius r_b und der Winkel φ_{Start}, Eingriffswinkel α= 20° und Profilverschiebungsfaktor x= 0 mm, φ_{Start} = 0,853958291841°+90° = 1,58570071066 rad. Die unabhängige Grösse (Argument) bildet φ.

X/Y-Koordinaten Vektor 0P1 (x1/y1)

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(\varphi) &= r_b \bullet \cos(\varphi_{Start} - \varphi) \\ y_1(\varphi) &= r_b \bullet \sin(\varphi_{Start} - \varphi) \end{aligned}}$$



X/Y-Koordinaten Vektor P1P2 (x2/y2)

Folgende Bedingungen können für den Vektor P1P2 aufgestellt werden:

1. Steht rechtwinklig auf Vektor 0P1.

$$\overrightarrow{OP_1} \perp \overrightarrow{P_1P_2}$$

2. Die Bogenlänge aus r_b und φ entspricht dem Betrag des Vektors P1P2.

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \frac{2 \bullet r_b \bullet \pi \bullet \varphi}{2 \bullet \pi} = r_b \bullet \varphi$$

Winkel φ im Bogenmass [rad].

1. Bedingung

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ y_1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt der beiden Vektoren muss Null sein.

$$0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad 0 = x_1 \bullet (x_2 - x_1) + y_1 \bullet (y_2 - y_1)$$

1. Gleichung $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{P_1P_2}$

2. Bedingung

$$r_b \bullet \varphi = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2}$$

2. Gleichung $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = r_b \bullet \varphi$

Gleichungssystem: x_2 und y_2 sind die Unbekannten

$$\left| \begin{aligned} 0 &= x_1 \bullet (x_2 - x_1) + y_1 \bullet (y_2 - y_1) \\ r_b^2 \bullet \varphi^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \end{aligned} \right|$$

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt die Koordinaten x_2 und y_2.

$$\boxed{x_2(\varphi) = \frac{x_1 \bullet \sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \varphi \bullet r_b \bullet y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \qquad y_2(\varphi) = \frac{\varphi \bullet r_b \bullet x_1 + y_1 \bullet \sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}}$$

Der Winkel φ kann frei gewählt werden, er wird von φ_{Start} aus gemessen und ist in Radianten in die Gleichungen einzusetzen.

$\varphi_{Start\ korr}$ Dieser Winkel gibt die Startposition für die Evolventenkurve vor.

$$\varphi_{Start\ korr} = \frac{\pi}{2} - 3{,}75° \bullet \frac{\pi}{180°} + 0{,}853958292 \bullet \frac{\pi}{180°} = \underline{\underline{1{,}52025\ rad}}$$

rb Grundkreisradius

$$r_b = \frac{d}{2} \bullet \cos(\alpha) \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{r_b}} = \frac{72\ mm}{2} \bullet \cos(20°) = \underline{\underline{33{,}8289\ mm}}$$

Auswertung der Formeln für die Stellung φ= 30° (Argument beliebig gewählt)

$$x_1(\varphi) = r_b \bullet \cos(\varphi_{Start} - \varphi) \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x_1(30°)}} = 33{,}8289\ mm \bullet \cos(1{,}52025 - 30° \bullet \frac{\pi}{180°}) = \underline{\underline{18{,}3731\ mm}}$$

$$y_1(\varphi) = r_b \bullet \sin(\varphi_{Start} - \varphi) \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{y_1(30°)}} = 33{,}8289\ mm \bullet \sin\left(1{,}52025 - 30° \bullet \frac{\pi}{180°}\right) = \underline{\underline{28{,}4047\ mm}}$$

$$\boxed{x_2(\varphi) = \frac{x_1 \bullet \sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \varphi \bullet r_b \bullet y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \qquad y_2(\varphi) = \frac{\varphi \bullet r_b \bullet x_1 + y_1 \bullet \sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}}$$

$$\underline{\underline{x_2}} = \frac{18{,}3731 \bullet \sqrt{18{,}3731^2 + 28{,}4047^2} - 0{,}5235 \bullet 33{,}8289 \bullet 28{,}4047}{\sqrt{18{,}3731^2 + 28{,}4047^2}} = \underline{\underline{3{,}5004\ mm}}$$

$$\underline{\underline{y_2}} = \frac{0{,}5235 \bullet 33{,}8289 \bullet 18{,}3731 + 28{,}4047 \bullet \sqrt{18{,}3731^2 + 28{,}4047^2}}{\sqrt{18{,}3731^2 + 28{,}4047^2}} = \underline{\underline{38{,}0248\ mm}}$$

Microsoft Excel - Berechnung_Schneckengetriebe.xls

X/Y Koordinaten der Evolvente

φ [°]	φ [rad]	x1 [mm]	y1 [mm]	x2 [mm]	y2 [mm]
0	0.00000000	1.70917116	33.78572973	1.70917116	33.78572973
2	0.03490659	2.88723494	33.70549916	1.71069107	33.80628267
4	0.06981317	4.06178107	33.58420363	1.71716135	33.86776945
6	0.10471976	5.23137855	33.42199093	1.73143584	33.96981961
8	0.13962634	6.39460240	33.21905868	1.75634681	34.11191361
10	0.17453293	7.55003541	32.97565412	1.79469803	34.29338388
12	0.20943951	8.69626986	32.69207380	1.84925793	34.51341631
14	0.24434610	9.83190925	32.36866324	1.92275278	34.77105187
16	0.27925268	10.95556997	32.00581644	2.01785995	35.06518872
18	0.31415927	12.06588302	31.60397548	2.13720130	35.39458442
20	0.34906585	13.16149565	31.16362995	2.28333666	35.75785862
22	0.38397244	14.24107302	30.68531633	2.45875738	36.15349582
24	0.41887902	15.30329984	30.16961738	2.66588006	36.57984863
26	0.45378561	16.34688195	29.61716141	2.90704042	37.03514113
28	0.48869219	17.37054789	29.02862148	3.18448727	37.51747258
30	0.52359878	18.37305050	28.40471465	3.50037669	38.02482140
32	0.55850536	19.35316838	27.74620105	3.85676636	38.55504934